Il problema nella scuola

Gianfranco Arrigo

Con questo nuovo scritto, l'autore ritorna a occuparsi del problem solving nella scuola. Lo fa perché questo tipo di apprendimento, sostanzialmente strategico, è poco praticato nella nostra scuola, nonostante la letteratura internazionale negli ultimi anni se ne sia occupata in larga misura e abbia messo in risalto la sua importanza nel contesto di una corretta educazione matematica. La parte teorica è stata volutamente ridotta per lasciare il posto a una serie di esempi commentati.

1. Introduzione

L'attività di *problem solving* è sotto la lente di parecchi studiosi di didattica della matematica e costituisce oggi una delle questioni emergenti più delicate che la scuola è chiamata ad approfondire. In matematica, ma non solo. In casa nostra, se diamo un'occhiata ai programmi Harmos ci accorgiamo subito che la risoluzione di problemi occupa un ruolo basilare. Se interpreto bene lo spirito di queste proposte programmatiche, posso affermare senza ombra di dubbio che questi principi didattici permeano tutto il discorso metodologico.
Soffermiamoci sul programma dell'«Area matematica» di Harmos. Nel paragrafo «1.2 Aspetti metodologico-didattici» si legge:

(...) Gli allievi devono essere stimolati a una continua verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte; bisogna rimuovere la convinzione erronea che fare matematica consista nel trovare l'unica soluzione corretta e che questa vada trovata, rifuggendo gli errori, mediante l'applicazione di definizioni, formule e procedimenti standard di cui solo l'insegnante è depositario.

E qualche riga più in giù:

(...) È auspicabile che l'acquisizione di competenze da parte degli allievi avvenga a partire da situazioni-problema autentiche, significative e stimolanti, a volte più vicine alla vita quotidiana a volte più intrinseche alla matematica stessa.

Affermazioni che andrebbero scolpite sulla facciata di ogni aula di matematica e servire da stimolazione continua dell'attività didattica. Idee direttrici che andrebbero prese sul serio da tutti gli insegnanti, direttori, ispettori, esperti e via dicendo. Stimoli che sollecitano l'animo delle persone capaci di recepirli positivamente e di dar loro seguito nella pratica didattica quotidiana. Purtroppo ciò non sempre avviene. A volte, chi dovrebbe leggere questi testi e rifletterci seriamente assume atteggiamenti di insofferenza, considera tali discorsi didattici come cose inutili, magari utopistiche, comunque lontane dalla «realtà delle classi» e continua a insegnare come ha sempre fatto.
Già, la «realtà delle classi»: comodo alibi per non cambiare nulla. Quante volte mi sono sentito dire, nell'ambito di corsi di formazione continua: «tutto bello quello che ci racconti, ma nella mia classe sarebbe inapplicabile». Eppure ci sono gli insegnanti che riescono ad applicare in classe questi principi didattici ottenendo ottimi risultati e per di più anche con classi considerate «disastrate».
È quindi importante che ogni insegnante si convinca, se già non lo fosse, che occorre a poco a poco staccarsi dai modelli didattici del tipo «spiegazione-esemplificazione-esercitazione-valutazione». Sono chiari esempi di involuzione dell'insegnamento: «ti insegno una conoscenza A, te la esemplifico, ti somministro una serie di esercizi che concernono A, ti valuto su esercizi simili e concludo che hai appreso A». Certo, molto probabilmente ho appreso A, ma, al di fuori del contesto classe e di quel particolare periodo del piano annuale nel quale l'insegnante ha scritto «A» nella apposita casellina, io, allievo qualunque, la conoscenza A non la incontro più, o, per lo meno, non la

incontro allo stato puro, come mi è stata insegnata in classe, ma in vesti diverse e mescolate ad altre conoscenze (B, C, ecc.) e quindi quasi mai facilmente riconoscibile.

Insegnare in modo costruttivo non è né facile né comodo, ma fortemente stimolante e soddisfacente. Col passare del tempo, il clima della classe diventa sempre più gradevole sia per l'insegnante sia per gli allievi, che si sentono corresponsabili del loro apprendere, imparano ad autovalutarsi e incrementano la fiducia nei propri mezzi. Ma, al di là di tutto ciò, gli allievi si rendono conto che la matematica non è costituita solamente di una serie di concetti e procedimenti che occorre memorizzare (matematica «morta»), ma è molto di più. È ragionamento, è vita, è un insieme di conoscenze e di atteggiamenti che ciascuno può costruirsi da sé (se ben guidato), affinando nel contempo le proprie capacità di apprendere autonomamente. In questo modo si ottiene un apprendimento di qualità, robusto, formativo, duraturo.

2. Le due anime della matematica e del suo apprendimento

Nessuno è mai riuscito a definire in modo accettabile la matematica come disciplina. Ecco, di seguito, alcuni tentativi fra i molti.

La matematica è l'alfabeto in cui Dio ha scritto l'Universo. (Galileo Galilei)

Il matematico non scopre: inventa. (Ludwig Wittgenstein)

L'essenza della matematica è la sua libertà. (Georg Cantor)

La matematica può essere definita come la scienza in cui non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che diciamo è vero. (Bertrand Russell)

Non solo la matematica è reale, ma è l'unica realtà. (Martin Gardner)

Personalmente mi piace abbastanza la definizione tautologica, forse meno criticabile:

La matematica è ciò di cui si occupa il matematico.

Per capire il senso che questi personaggi illustri hanno voluto dare alle loro definizioni di matematica, occorrerebbe considerarne l'epoca e il relativo contesto culturale, ciò che esula dal presente scritto.
Per contro, può essere utile accennare alle due anime della matematica, che si intravedono anche nelle massime citate:

- la risoluzione di problemi
- la costruzione e la sistemazione di teorie

Un bel risolutore di problemi può essere identificato nel nostro Leonhard Euler (1707-1783). Egli, come molti suoi contemporanei, risolse una moltitudine di problemi usando i metodi del calcolo differenziale e integrale, senza lasciarsi influenzare dal fatto che questa teoria (successivamente chiamata analisi), in quel tempo, non era ancora fondata e quindi guardata con sospetto da gran parte dei matematici e dei filosofi. In particolare, non si era ancora arrivati a definire il numero reale e di conseguenza il concetto basilare di continuità di una funzione reale. Cose che vennero poi messe a posto da Richard Dedekind (1831-1916), che di fatto consacrò tutti i risultati che i suoi predecessori ottennero… in via ufficiosa.
Un buon rappresentante dei costruttori di teorie mi sembra sia stato Nicolas Bourbaki, non un matematico, ma un gruppo di matematici francesi che, sotto questo pseudonimo, a partire dal 1930, pubblicarono un'opera monumentale con l'intenzione di sistemare assiomaticamente tutta la

matematica conosciuta. Impresa titanica, ma viziata da un errore di fondo che, quasi contemporaneamente, viene evidenziato da Kurt Gödel (1931, teoremi di incompletezza), cioè, in semplici parole, che la cosa non è possibile.

Le due anime della matematica si rispecchiano anche nella didattica di questa disciplina. In questo scritto mi occupo della risoluzione di problemi[1], attività che, dal punto di vista strettamente matematico, non deve subire troppi condizionamenti teorici. L'intuizione la fa da padrona e in questa fase non ci si deve preoccupare della sistemazione dei concetti. Un buon modo di comportarsi è di ritenere corrette le intuizioni che al momento danno risultati non contraddittori, fin che non si scopra un controesempio.
Le caratteristiche dell'attività di risoluzione di problemi si possono riassumere nel modo seguente.

- **La socializzazione dell'apprendimento**. Di fronte a una situazione non conosciuta, tutti gli allievi sono ai piedi della scala. Per poterla superare, occorre la collaborazione di tutti. Ogni idea può essere utile per costruire un corretto percorso risolutivo; anche quelle che risultano errate. In questo contesto l'errore insegna che cosa non fare, quali direzioni non percorrere, quindi assume una connotazione costruttiva, positiva, ciò che infonde coraggio agli allievi perché sanno che «si può sbagliare, anzi…». Confrontando le proprie idee, i propri tentativi, essi imparano ad ascoltare, a valutare razionalmente e a rispettare le idee altrui. Parallelamente, ogni allievo si sente parte di un gruppo che rincorre lo stesso obiettivo -di giungere a una soluzione- e tutto ciò che viene conquistato è anche parte di se stesso, ciò che contribuisce a rinforzare la fiducia nei propri mezzi.
- **Lo sviluppo del pensiero divergente**. Affrontare un problema mai incontrato significa soprattutto stimolare e sviluppare le proprie capacità intuitive e creative. Nell'ottica metodologica, ci si pone agli antipodi dell'esercitazione su determinati algoritmi conosciuti. La risoluzione di problemi -quindi *in primis* l'apprendimento strategico- si rivela un insostituibile complemento all'apprendimento algoritmico.
- **Il confronto razionale**. La messa in comune delle diverse idee che gli allievi esprimono permette a ciascuno di imparare a confrontarsi razionalmente, il che significa argomentare oppure confutare per mezzo di ragionamenti che devono essere logicamente corretti e coerenti con le conoscenze matematiche già acquisite. Il valore educativo di questa attività è evidente: la ragione si pone al di sopra di qualsiasi idea errata, poco importa se promossa con arroganza o se sostenuta dalla maggioranza. È, insomma, il metodo scientifico che deve prevalere e che ogni allievo, a poco a poco, impara a usare correttamente.
- **L'immagine della matematica**. È soprattutto svolgendo attività di *problem solving* che gli allievi possono costruirsi un'immagine positiva della matematica, come disciplina intellettualmente stimolante, che lascia a chi la pratica notevoli spazi di libertà, pur limitati da una serie di paletti. Si sa però che il valore dell'atto creativo diventa ancor più importante quando lo stesso deve sottostare a determinate condizioni, chiaramente conosciute. Quando questo si realizza, la soddisfazione del soggetto è inimmaginabile. Non è necessario pensare a grandi realizzazioni matematiche, come quelle per esempio che ci ricorda la ricchissima storia di questa disciplina (purtroppo sconosciuta dalla maggior parte dell'umanità). Basta vedere la gioia che traspare dagli occhi di un allievo quando giunge alla soluzione.

3. Il problema nella pratica scolastica

Come ho già avuto modo di ricordare più volte[2], nella letteratura, al termine problema si dà un significato preciso che può per esempio essere descritto così:

---

[1] Con riferimento soprattutto alla scuola dell'obbligo.
[2] Si veda ad esempio: Arrigo G. (2015).

Un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. (Kanizsa, 1973)[3]

Detto questo, occorre chiarire il più possibile le caratteristiche che dovrebbe avere un problema scolastico per essere considerato tale.

Un buon problema scolastico dovrebbe avere almeno le seguenti caratteristiche.

- **Può essere adattato a più ordini di scuola**. Il problema, nella sua veste generale, non dev'essere mai pensato su misura per una data classe, bensì costruito in modo da poter essere presentato su un ampio ventaglio di classi, diciamo dalle elementari (o in certi casi anche dalla scuola dell'infanzia) in su, senza alcun limite superiore. È compito degli insegnanti adattare la consegna ai propri allievi. Con una raccomandazione: non sottovalutare le loro potenzialità. È evidente che il problema, essendo nuovo per l'allievo, pone quest'ultimo di fronte a difficoltà, ma è proprio in questo che sta il valore educativo. Più che il risultato da raggiungere, è importante lo sforzo mentale, il processo, che l'allievo si accinge ad affrontare e che col tempo lo trasformerà in un individuo che sa affrontare anche situazioni mai viste. Insisto sul verbo «affrontare», che, in questo contesto, preferisco nettamente al solito «risolvere».
- **Deve provocare il desiderio di essere risolto**. Si sa che l'aspetto emotivo è fondamentale nell'apprendimento. L'allievo che viene coinvolto in una problematica, di fronte alla quale sente forte il desiderio di vederci chiaro, di capire il perché, di costatare che la realtà non sempre coincide con quello che l'esperienza di vita ci suggerirebbe (il più volte decantato «buon senso»), di vedere infine che con un po' di buona voglia e di semplici conoscenze matematiche ciascuno può giungere alla padronanza (parziale o totale) di una data situazione, di un dato problema.
- **Può essere risolto in più modi**. È bello, costruttivo e fondamentale poter rendersi conto che ogni problema può essere risolto in più modi, ciò che aumenta considerevolmente il margine di libertà entro il quale gli allievi possono agire. L'insegnante che, avendo in mente almeno un iter risolutivo, volesse influenzare gli allievi in quella direzione commetterebbe un evidente errore didattico. Come insegnanti ci si dovrebbe astenere anche dal valutare i diversi percorsi risolutivi praticati dagli allievi: se corretti, sono tutti accettabili e non dovrebbero essere considerati più o meno eleganti, più o meno comodi, più o meno coerenti con la propria mentalità. Considerazioni di questo tipo le faranno sicuramente gli allievi, anche se non immediatamente, e col tempo ogni allievo farà le proprie scelte, secondo le proprie inclinazioni ed esperienze.
- **La(e) soluzione(i) è sorprendente, non prevedibile, oppure può anche non esistere**. Anche se non ho dato molta importanza al risultato, lo stesso può in certi casi diventare protagonista e contribuire in modo rilevante allo sviluppo mentale dell'allievo. Ciò avviene quando il risultato non è affatto prevedibile, quando crea sorpresa, quando destabilizza. Ecco quindi un criterio da non dimenticare nella scelta dei problemi da proporre in classe. È importante anche prendere in considerazione ogni tanto problemi che non hanno soluzione, o che ne hanno più di una o che presentano dati contraddittori. Intendo presentarli mescolati con altri, senza lasciarsi sfuggire alcun messaggio di attenzione. Sarà poi durante la messa in comune che si sottolineeranno le peculiarità di questi problemi, generalmente considerati abnormi nel contesto scolastico, ma che sono presenti (eccome!) nella realtà in cui viviamo.

[3] Per approfondimenti si consiglia: D'Amore B. (2014).

- **Deve generare nuove curiosità**. Un buon problema dovrebbe terminare sempre con una domanda del tipo «e se la situazione fosse diversa?». Questo atteggiamento non è automatico negli allievi, ma col tempo, verrà a galla e allora ci si può immaginare che un problema nato così suscita immediatamente negli allievi la voglia di affrontarlo, proprio perché nato da una loro curiosità.

4. Come proporre un problema in classe

Dico subito che vi sono parecchie modalità di assegnare un problema e che ogni insegnante dovrebbe, nel limite del possibile, tenerne conto e non conformarsi a una sola, a quella abituale, a quella per loro più comoda. Vi sono modi di presentare che si adattano meglio a certe classi di età, a determinati ordini scolastici, ma rompere ogni tanto queste abitudini può essere importante e aumentare negli allievi la voglia di affrontare il problema. Aggiungo che presentare un problema significa prima di tutto presentare una situazione, non necessariamente accompagnata da domande. Queste dovrebbero nascere dalla curiosità degli allievi e in un secondo tempo formalizzate dall'insegnante in modo adeguato.
Di seguito, un elenco di modalità di presentazione, fra le più diffuse, abbinate ai diversi registri semiotici che le caratterizzano.

Il registro orale. Modalità adatta ad allievi della scuola dell'infanzia e delle elementari, ma che può anche essere usata con studenti dalle medie in avanti. La presentazione orale ai più piccoli è d'uopo, mentre per gli altri può rivelarsi un buon modo per spingerli a trasformare ciò che hanno udito in un registro semiotico più adatto per risolvere il problema.

Il registro testuale scritto. È certamente il più usato a scuola, tuttavia l'uso prolungato e costante genera una distorsione dell'immagine che gli allievi hanno del problema. Importanti ricerche hanno mostrato come gran parte di loro considerano il problema scolastico come qualcosa che prescinde da ogni situazione reale e per di più come una questione alla quale si deve sempre rispondere operando con i dati numerici contenuti nell'enunciato. Così nel noto problema «l'età del capitano», nella versione usata nel celeberrimo esperimento di Grenoble, gran parte degli allievi addiziona i numeri di pecore (26) e di capre (10) trasportate da una nave per rispondere alla domanda «quanti anni ha il capitano?» (Bolondi, D'Amore, 2010).

Il registro iconico-figurale. Può essere costituito da un'immagine (disegno, foto) oppure da un video, da una striscia di fumetti, ecc. È una modalità di presentazione molto gradita dai giovani di oggi, abituati alla lettura delle immagini, quindi varrebbe la pena usarla maggiormente.

Il registro manipolatorio. Combinato con il registro orale è la modalità di presentazione più applicata con i piccoli allievi, ma che potrebbe essere più presente anche nelle elementari, nelle medie e in qualche occasione anche nelle superiori (per esempio quando si propongono attività sui solidi geometrici, sulla geometria vettoriale, sulla combinatoria e sulla probabilità).

Il registro geometrico. È adatto per allievi che sono in grado di leggere le figure geometriche (bi- o tri-dimensionali) stampate su un foglio. Occorre però che gli insegnanti controllino che ogni allievo legga correttamente la figura, tenendo conto che in essa si usano modalità e simboli assolutamente non universali, quindi variabili a seconda del contesto. Quando l'allievo passa da un ordine scolastico all'altro o quando cambia insegnante può scontrarsi con difficoltà di lettura che non gli permettono di entrare correttamente nella situazione proposta. Vi sono poi modi di rappresentazione «da adulti» che, se dati in pasto precocemente agli allievi, possono creare distorsioni concettuali. Un esempio su tutti, l'archetto usato per indicare gli angoli (Sbaragli, Santi, 2012).

Il registro informatico. Il foglio elettronico fornisce, fra l'altro, all'allievo un'ottima occasione per capire e rafforzare il concetto di variabile e quindi per permettergli di entrare con piena coscienza nel cosiddetto «calcolo letterale» (Arrigo, 2016). D'altro canto, il programma di geometria dinamica offre all'allievo la possibilità di realizzare veri esperimenti con le figure geometriche.

Ovviamente, i vari registri, le diverse modalità, possono anche essere combinati, basta che non vi siano evidenti doppioni. Caso tipico: un problema di geometria presentato con un testo (registro testuale) con accanto una figura (registro geometrico) che ripropone gli stessi dati presenti nel testo.
Come già accennato, nel corso della risoluzione è possibile, utile, in certi casi addirittura obbligatorio, passare da un registro all'altro. L'allievo abituato a ricevere problemi presentati con diverse modalità si abitua a poco a poco a passare da un registro all'altro e anche a ritornare al precedente a seconda di ciò che vuole ottenere.

5. La fase risolutiva

Quando la classe è in chiaro sulla situazione e sulle domande da prendere in considerazione, può iniziare la fase risolutiva. Ricordo che l'iter risolutivo dovrebbe essere praticato in un contesto di apprendimento socializzato, quindi è importante stimolare e promuovere gli scambi di idee fra allievi. Di solito si ricorre alla tecnica del lavoro per piccoli gruppi, intercalata da momenti di dialogo con l'intera classe che permettono di fare il punto alla situazione e di rilanciare il lavoro.
Non si deve però pensare che i lavori debbano procedere con lo stesso ritmo e sugli stessi percorsi per ciascun gruppo. Come già detto, un buon problema deve poter essere risolto in più modi e, quanto alla velocità, ogni insegnante sa che sarebbe illusorio prevedere che tutti i gruppi avanzino allo stesso modo. Ogni tanto può capitare che qualche allievo esprima il desiderio di lavorare da solo. Non è consigliabile obbligarlo ad aggregarsi a un gruppo: partirebbe con un importante handicap. Può anche verificarsi che, dopo qualche tempo, l'allievo stesso chieda di entrare in un gruppo, tanta è la forza di attrazione esercitata dalle discussioni che avvengono nei vari gruppi e che giungono alle sue orecchie.
Durante questa fase l'insegnante gioca un ruolo importante quanto delicato. Egli deve da un lato aiutare chi si trova in seria difficoltà, ma dall'altro non deve nemmeno esagerare lasciandosi sfuggire affermazioni decisive per il raggiungimento di un determinato risultato.

5. La messa in comune

La ricchezza del problema, l'impegno degli allievi e la libertà offerta loro dovrebbero aver favorito la costruzione di più iter risolutivi. Ogni gruppo, con l'intervento di ogni componente, presenta alla classe le proprie realizzazioni. La classe ascolta e pone domande, avanza obiezioni, effettua valutazioni in un clima costruttivo e permeato dalla razionalità.
L'opera dell'insegnante è volta a mantenere l'ordine in modo che ciascun allievo sia rispettoso delle idee altrui e giustifichi i propri interventi. All'insegnante spetta anche il compito di preservare la correttezza linguistica e l'uso appropriato dei termini matematici. Anch'egli potrebbe presentare una sua risoluzione e sottoporla al giudizio dei suoi allievi. Il valore formativo dell'attività di problem solving appare anche nella comprensione e nel confronto di più iter risolutivi.

6. Esempi di problemi

6.1 La conta

Un gruppo di 8 fanciulli vuole giocare a nascondino. I giocatori, Anna, Beppe, Carlo, Daniela, Enrico, Fedra, Gianna e Heidi devono designare il primo cercatore mediante una conta. Si dispongono in cerchio, nell'ordine, e decidono di contare fino a 51, a partire da Anna e procedendo in senso orario. Chi riceverà il 51 sarà il primo cercatore.

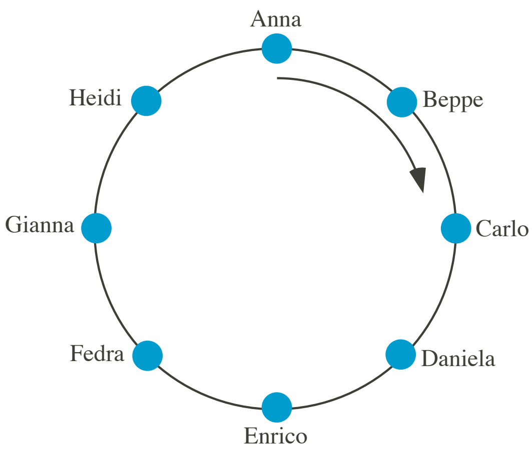


Figura 1. Disposizione in cerchio per la conta.

Domande possibili

- Chi sarà il primo cercatore?
- Quali numeri si possono sostituire a 51 per fare in modo che il cercatore risulti ancora quello di prima?

Primo livello

Ho scelto di iniziare con il gioco della conta perché, nella sua semplicità, racchiude (quasi) tutte le caratteristiche di un problema come descritto in precedenza.
Con bimbi di prima fascia si può simulare la situazione. Si dispongono 8 allievi in cerchio, ciascuno dei quali assume il ruolo di uno degli otto giocatori, esattamente come descritto dalla consegna scritta (raccontata dall'insegnante) e si procede alla conta, iniziando da Anna. Il 51 cade su Carlo. Si invita un altro allievo a rifare la conta e si suggerisce alla classe di fare bene attenzione ai numeri che successivamente cadono su Carlo: 3, 11, 19, 27, 35, 43, 51. Se si decidesse di contare fino a uno qualsiasi di questi numeri (escludendo forse il 3 perché minore di 8), il cercatore risulterebbe ancora Carlo. Ovviamente si potrebbe poi continuare con 59, 67, ecc.

Secondo livello

Con allievi più grandicelli si esaminano i numeri che cadono su Carlo e ci si rende conto che si succedono di 8 in 8 (che è il numero di fanciulli in cerchio). Questa seconda osservazione è decisiva, perché permette di estendere la situazione a insiemi di alunni di numerosità diversa. Per esempio, se si togliesse Heidi, il cercatore risulterebbe Beppe e i numeri che cadrebbero su di lui sarebbero 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, ecc. che si succedono di 7 in 7 (numero di fanciulli in cerchio).

Terzo livello

Il problema consiste ora nel trovare queste successioni di numeri, senza compiere la conta e nemmeno la regressione da 51 a 2 (o a 3), il che significa intuire che il primo numero, minore o uguale al numero F di fanciulli in cerchio, è proprio il resto della divisione di 51 per F. Questo passo è decisivo e ha anche una forte valenza concettuale: si toccano i concetti di divisione come successione di sottrazioni (dal dividendo al divisore) o successione di addizioni (dal divisore al dividendo) e di resto.

Quarto livello

A questo punto, con allievi introdotti nei rudimenti del calcolo letterale, si può giungere alla generalizzazione. Se T è il numero da raggiungere con la conta (che chiamiamo traguardo, negli esempi precedenti T=51) e F è il numero di fanciulli in cerchio, il cercatore risulterà chi occupa il posto il cui numero è il resto della divisione di T per F.

Così, ad esempio, se gli allievi fossero 9 e il traguardo 50, la conta porterebbe a designare chi occupa il posto numero 5, che è il resto della divisione per 9 di 50.

6.2 Corsa al numero

Si gioca in due.
Si stabiliscono un traguardo, per esempio 43, e un passo massimo, per esempio 7.
Si tira a sorte chi deve iniziare.
Il primo giocatore sceglie un numero naturale minore o uguale a 7, per esempio 5.
Il secondo deve aggiungere al 5 un numero compreso tra 1 e il passo massimo 7, per esempio 6 e si arriva a 11 = 5 + 6
Il gioco passa poi al primo giocatore che, partendo da 11, deve fare la stessa cosa.
E così via.
Vince chi riesce a dire per primo 43.

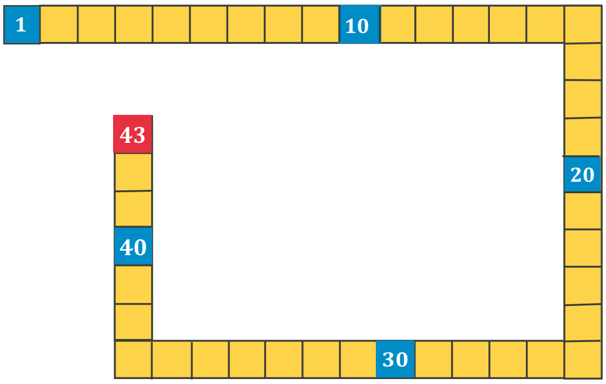


Figura 2. Gioco della corsa al numero, con pedine.

Domanda

Cercare, se esiste, una strategia vincente.

Commento

La consegna deve concernere unicamente le regole del gioco, dopo di che gli allievi, a due a due, iniziano a sfidarsi. In questo modo risulta persino inutile porre la domanda, perché sorge spontaneo in ogni allievo il desiderio di vincere.

Primo livello

Le strategie trovate dagli allievi -corrette, errate o incomplete- vengono testate. A mano a mano che si susseguono le diverse sfide, gli allievi iniziano a capire che chi riesce a dire 35 vince di sicuro. Infatti, in quel caso, l'avversario può al massimo raggiungere 42 e quindi perde. Un passo successivo consiste nel pensare come fare per raggiungere 35 e si scopre che un altro numero vincente è 27. La regressione 27 – 19 – 11 – 3 segue quasi automaticamente.
Quindi, per essere sicuri di vincere con il traguardo (T) 43 e il passo massimo (P) 7, occorre iniziare per primi e dire 3; successivamente occorre dire 11, 19, 27, 35, 43, ciò che è sempre possibile, indipendentemente dal numero scelto dall'avversario.
Occorre sempre tener presente che vi sono parecchi percorsi risolutivi e che quindi quelli descritti in queste righe e nelle successive sono solo esempi.

Secondo livello

Se si esamina attentamente la successione vincente 3, 11, 19, 27, 35, 43, si capisce che ogni termine, tranne il primo, è ottenibile dal precedente addizionando 8, cioè 7+1 (7 è il passo massimo). L'analogia col problema precedente (o con uno che abbia la stessa struttura matematica), dovrebbe permettere di procedere più speditamente. Basta ricordarsi di partire dal numero 3 e proseguire di 8 in 8.

Terzo livello

Ultimo passo importante: determinare il numero di partenza. Sempre riflettendo sul problema della conta, si capisce che 3 non è altro che il resto della divisione 43:8, o meglio il resto di 43:(7+1). Qui gli allievi sono di nuovo chiamati a mobilitare i concetti di divisione e di resto.
Questo risultato permette di effettuare un primo passo verso la generalizzazione. Così, se il traguardo fosse 99 e il passo 9, la strategia vincente consisterebbe nell'iniziare per primi scegliendo il numero 9 (resto della divisione 99:(9+1)) e dicendo di seguito i numeri 19, 29, …, 89, 99.
Quando gli allievi hanno sufficiente dimestichezza con il calcolo letterale possono esprimere la strategia in termini generali, cioè «iniziare per primi scegliendo il resto della divisione T:(P+1) e poi continuare addizionando P+1 di volta in volta.
E se l'avversario volesse giocare per primo? Il *fair play* dice di accettare comunque la sfida. Non si è però sicuri di vincere: tutto dipende dal numero di partenza scelto dall'avversario. Se non fosse il resto della divisione T:(P+1), avete la strada spianata verso la vittoria. Altrimenti non vi resta che sperare che l'avversario non inanelli fino alla fine la successione vincente.

Un pregio particolare dei due problemi presentati consiste nel fatto che l'elemento centrale dell'iter risolutivo è il resto di una divisione, che solitamente, nella scuola, riveste un ruolo secondario.

6.3 Uno strano modo di distribuire caramelle

Marisa vuole distribuire ai suoi amici le caramelle che tiene in un sacchetto. Li dispone in cerchio e li fa numerare da 1 a 15, come mostra, più avanti, la figura 1.
Procede quindi alla distribuzione così:
- compie un primo giro e dà a ciascuno una caramella;
- compie un secondo giro e dà una caramella agli amici che occupano un posto pari;
- compie un terzo giro e dà una caramella agli amici che occupano un posto divisibile per 3;
- continua così fino al quindicesimo giro nel quale dà una caramella a ogni amico che occupa un posto divisibile per 15.

Fatto questo, le rimangono 3 caramelle che tiene per sé.

Domande possibili
- Quante caramelle aveva Marisa nel sacchetto?
- Chi dei suoi amici ne ha ricevute di meno? Chi di più?
- Che qualità deve avere il numero di chi riceve più caramelle?

Commento

Primo livello

La situazione può essere proposta mediante una piccola messa in scena. Si mettono in cerchio 15 allievi (o forse 12, come nel quadrante di un orologio, o…) e un altro procede alla distribuzione delle caramelle, seguendo correttamente il modo comunicato dall'insegnante. Alla fine, con pazienza e metodo, si contano le caramelle.
Come alternativa, si può eseguire un calcolo che, come sempre, può essere affrontato in più modi, per esempio così:
$1+2+2+3+2+4+2+4+3+4+2+6+2+4+4+3= 1+2\cdot 6+3\cdot 3+4\cdot 5+6 = 10+20+12+6+3=48$

Secondo livello

La consegna testuale scritta, così come presentata sopra o in altre forme, può essere data ad allievi che non hanno problemi di lettura e comprensione di un testo, per esempio alle medie. Questi potrebbero rappresentare la situazione mediante uno schizzo e simulare la distribuzione di caramelle, per esempio con dei trattini come fanno i giocatori di jass (vedere la figura 4).

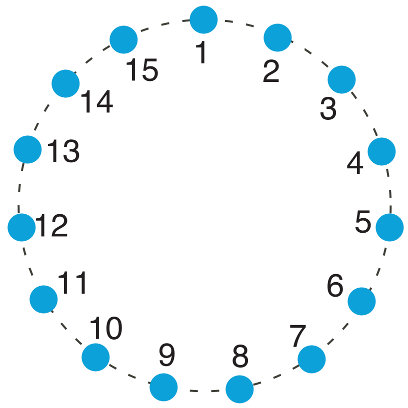


Figura 3. La disposizione in cerchio

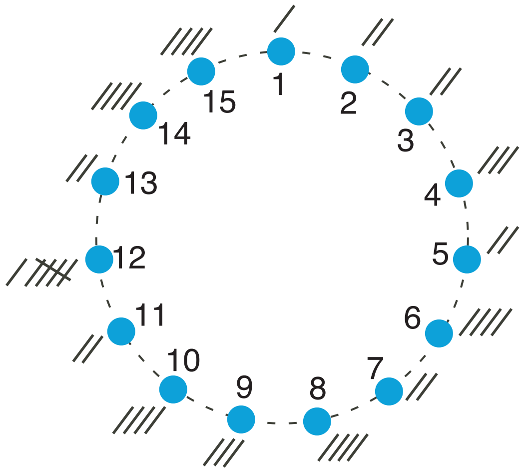


Figura 4. La distribuzione

La conversione dal registro testuale a quello iconico-figurale si rivela vincente. Fatta la simulazione non resta che esaminare la situazione.
Un semplice sguardo alla seconda figura permette di rispondere subito alle prime due domande. Chi occupa la posizione 1 riceve una sola caramella, cioè meno di tutti. Chi sta nelle posizioni 2, 3, 5, 7, 11, 13 riceve due caramelle. Tre caramelle corrispondono alle posizioni 4 e 9. Quattro caramelle sono per le posizioni 6, 8, 10, 14 e 15. Infine chi occupa la posizione 12 riceve il massimo di caramelle cioè 6. A Marisa ne restano 3. Il semplice calcolo ($1+2\cdot6+3\cdot2+4\cdot5+6+3=48$) permette di rispondere alla prima domanda.
La terza domanda stimola gli allievi a riflettere di più. Perché chi occupa la posizione 12 riceve più caramelle? In quali passaggi riceve la caramella?

Terzo livello

A questo punto è possibile rilanciare la riflessione.
Per esempio:

- che qualità hanno i numeri corrispondenti a due caramelle? Hanno due divisori, sono numeri primi!
- che qualità hanno i numeri corrispondenti a tre caramelle? Sono numeri quadrati, hanno 3 divisori (cioè un numero dispari di divisori), come per esempio 9 che ha i divisori (1, 3 e 9). Anche questa è una bella osservazione!

Nella discussione, prima o poi, emerge il fatto che 15 è numero troppo esiguo per verificare le osservazioni appena fatte. Può allora essere interessante chiedersi quali numeri sarebbe opportuno sostituire al 15 per raggiungere maggiore sicurezza, tenendo presente che numeri troppo grandi renderebbero troppo difficile sia la conta sia il calcolo.

6.4 L'amnistia[4]

Nella lontana Repubblica di Sikinia si celebra l'anniversario della costituzione. Per l'occasione, il presidente decide di concedere l'amnistia a un certo numero di carcerati. La prigione si compone di 16 celle, numerate da 1 a 16. In ogni cella c'è un carcerato. La porta di ogni cella, sull'esterno, ha una maniglia che può essere girata in due sole posizioni: aperta (A) o chiusa (C). All'inizio tutte le

[4] Da un'idea di Arthur Engel, matematico e didatta tedesco.

maniglie sono messe in posizione C.
Il presidente, amante dei giochi matematici, dà al secondino l'ordine seguente.
Inizia dalla cella 1 e, una dopo l'altra, gira tutte le maniglie.
Poi ritorna all'inizio e gira, partendo dalla 2, le maniglie di tutte le celle di numero pari.
Di nuovo torna all'inizio e, partendo dalla cella numero 3, gira tutte le maniglie delle celle dal numero divisibile per 3.
Poi fa la stessa cosa con le celle divisibili per 4, poi con quelle divisibili per 5, e così via fin che l'ultima fatica sarà solo quella di girare la maniglia della cella 16 partendo dalla cella numero 16.

Domanda

Quali celle risulteranno aperte alla fine, permettendo così al carcerato che le occupa di uscire di prigione?

Commento
La situazione è analoga alla precedente. Cambia solo la domanda e l'accento è messo sui numeri quadrati.

Primo livello

Nella nostra situazione, all'inizio, le maniglie sono in posizione C. Ogni volta che il secondino gira la maniglia di una cella, questa cambia di stato. Se durante l'intera operazione il secondino gira una sola volta la maniglia della cella, questa alla fine risulterà aperta (**C**➔A) e il carcerato sarà liberato. Se il secondino gira due volte la maniglia la cella, alla fine, risulterà chiusa (**C**➔A➔C). Se girerà 3 volte la maniglia (**C**➔A➔C➔A) la cella, alla fine, risulterà aperta, ecc.
Si deduce che saranno liberati i carcerati delle celle la cui maniglia viene girata un numero dispari di volte. Fin qui ci si può arrivare senza troppe difficoltà. È anche possibile rappresentare l'intera situazione mediante uno schema, scrivendo per esempio la successione dei numeri naturali da 1 a 16 e sotto di essa segnando alternativamente con A e con C lo stato delle maniglie a ogni passaggio. Si scoprirà allora che le celle che rimarranno libere portano i numeri: 1, 4, 9 e 16.

Secondo livello

Se osserviamo i numeri 1, 4, 9 e 16 (quelli delle celle che rimarranno aperte alla fine), si costata che sono numeri quadrati e che hanno 1, 3 e 5 divisori. Possiamo intuire che, forse, sono proprio i numeri quadrati che hanno un numero dispari di divisori?

Terzo livello

La riflessione sul numero di divisori può essere formalizzata, per esempio, in questo modo:
se $n = d_1 \cdot d_2$ diciamo che (d_1,d_2) è una coppia di divisori complementari. Ciò significa che ogni numero n possiede k coppie di divisori complementari, cioè 2k divisori? Sì, tranne in un caso, quando una coppia di divisori complementari è del tipo (a,a), cioè quando $n = a \cdot a$, dunque quando n è un numero quadrato.
La versione originale di Arthur Engel parla di 100 celle. Sarebbe umanamente impossibile simulare il lavoro del secondino. Conoscendo però i risultati appena ottenuti, si può rispondere senza più dubbi che alla fine rimangono aperte le celle 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.
Gli insegnanti troppo preoccupati dalla necessità di raggiungere il risultato potrebbero giudicare questo problema troppo difficile per allievi della scuola obbligatoria. Pensiamo invece al lato formativo, cioè al percorso che gli allievi compiono riflettendo, provando, discutendo tra di loro, anche cogliendo gli stimoli che l'insegnante -sempre in modo discreto e interlocutorio- ritiene di poter dare e concludiamo che vale la pena tentare.

6.5 Distribuzione di cioccolatini

Gianni ha un sacchetto pieno di cioccolatini. Li vuole distribuire in tre cestini in questo modo: inizia a mettere un cioccolatino nel primo cestino in alto e poi compie un percorso composto di un certo numero di movimenti «giù-su» come indicato nella figura seguente. Ogni volta che incontra un cestino, vi mette un cioccolatino.

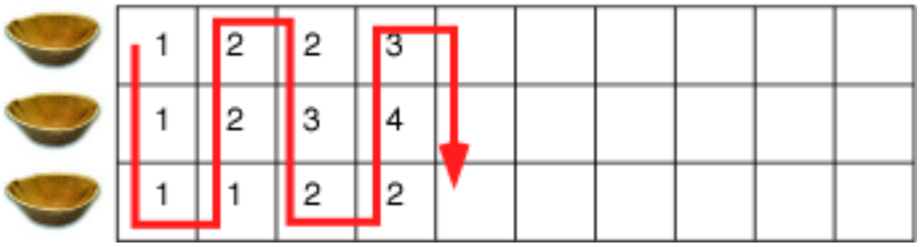


Figura 5. Tabella illustrativa della distribuzione di cioccolatini.

Domande possibili

- Come continua la tabella?
- Che cosa rappresentano i tre numeri dell'ultima colonna?
- Quanti cioccolatini distribuirebbe Gianni se facesse 10 «giù-su»?

Commento

Primo livello

La consegna può essere data eseguendo davanti alla classe la distribuzione dei cioccolatini in tre contenitori allineati. La stessa operazione può essere fatta, a turno, dagli allievi stessi. Così dovrebbe essere chiarita anche la struttura della tabella che gli allievi devono completare.

1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Figura 6. Tabella completata.

Una prima difficoltà consiste nel capire che le colonne significative sono quelle di ordine pari (ogni movimento «giù-su» è rappresentato da due colonne). I tre numeri dell'ultima colonna rappresentano il numero di cioccolatini che si trovano nei tre contenitori dopo 5 «giù-su», cioè 6+10+5=21.
Per rispondere alla terza domanda si può continuare la distribuzione manuale dei cioccolatini fino al decimo «giù-su» ed eventualmente prolungare di conseguenza la tabella.

1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10

Figura 7. Tabella estesa e completata.

Dalla tabella si ricava che dopo 10 «giù-su» si sono distribuiti 11+20+10=41 cioccolatini.

Secondo livello

Agli studenti più grandicelli si potrebbe dare il testo e la tabella da completare. Fatto questo, si invitano gli stessi a cercare di intuire come continuano i numeri di ciascuna riga, senza ricorrere alla distribuzione manuale né all'estensione della tabella. La prima osservazione potrebbe essere quella relativa alla terza casella dall'alto. Essa porta il numero progressivo delle operazioni «giù-su» effettuate. Così il terzo numero della terna relativa al decimo «giù-su» sarà 10. Altra osservazione: il primo numero (in alto) è un'unità in più del terzo numero. Infine il numero di mezzo sembra essere il doppio del terzo. Di conseguenza, la terna corrispondente alle 10 operazioni «giù-su» potrebbe essere (11, 20, 10) e i cioccolatini distribuiti sarebbero 11+20+10=41. Ovviamente non si dimostra nulla, si intuisce soltanto.

Terzo livello

Si potrebbe non dare la tabella, solo spiegare come avviene la distribuzione.
In questo caso, per rispondere alla terza domanda si potrebbe ragionare direttamente sui totali dei cioccolatini distribuiti nelle successive operazioni «giù-su». È più impegnativo, ma si presta meglio per la generalizzazione. L'idea vincente consiste nell'osservare la successione 5, 9, 13, 17, 21, ecc. In essa, ogni termine, tranne il primo, è ottenibile addizionando 4 al precedente. Con un po' di pazienza, dopo 10 «giù-su», si troverebbe che i cioccolatini distribuiti sono 41.

Quarto livello

Ma si può fare di più, per esempio osservare (in un modo o in un altro) che se n è il numero di «giù-su» e f(n) il numero di cioccolatini distribuiti all'ennesimo «giù-su», si può scrivere:

n=1 $f(1) = 5 = 4 \cdot 1 + 1$
n=2 $f(2) = 9 = 4 \cdot 2 + 1$
n=3 $f(3) = 13 = 4 \cdot 3 + 1$
n=4 $f(4) = 17 = 4 \cdot 4 + 1$
n=5 $f(5) = 21 = 4 \cdot 5 + 1$
(…)
n=10 $f(10) = 4 \cdot 10 + 1 = 41$

in generale:

$f(n) = 4 \cdot n + 1$

Infine si potrebbero anche considerare tutte le colonne e i loro totali. Si otterrebbe la successione 3=2·**1**+1, 5=2·**2**+1, 7=2·**3**+1, 9=2·**4**+1, 11=2·**5**+1, 13=2·**6**+1, 15=2·**7**+1, 17=2·**8**+1, 19=2·**9**+1, 21=2·**10**+1.
Si osserva allora che i numeri scritti in grassetto coincidono con il numero progressivo delle colonne e ogni termine della successione rappresenta il numero di cioccolatini distribuiti fino a quel punto. Quindi dopo 10 «giù-su», nell'ultima colonna (che è la ventesima) si troverebbero 2·20+1=41 cioccolatini.

In generale, se k è il numero di colonne, la k-esima colonna conterrebbe 3 numeri la cui somma è $2 \cdot k+1$. Si nota infine che $k=2\,n$, perciò, se operiamo una semplice sostituzione, possiamo scrivere $f(n) = 2\,(2\,n) + 1 = 4\,n + 1$. Raggiungiamo così, non senza soddisfazione, il risultato di prima.

Quinto livello

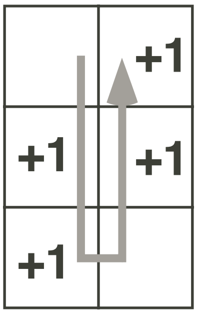
Con studenti delle superiori, si può anche dare carattere rigoroso ai risultati intuiti. Occorre impostare una dimostrazione per induzione completa. Per esempio, in questo modo.

1) Ancoraggio: $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

2) Ipotesi di induzione: $f(n–1) = 4\,(n–1) + 1 = 4\,n – 3$

3) Tesi di induzione: $f(n) = 4\,n + 1$

Nel passaggio dallo stato n–1 allo stato n, si aggiungono 4 cioccolatini, come risulta dal seguente schema:



Perciò:

f(n) = f(n–1) + 4 = (4 n – 3) + 4 = 4 n + 1

4) Conclusione: la formula f(n) = 4 n + 1 è vera per n=1 (1), se è vera per n–1, allora è vera per n; dunque è vera per n = 1, 2, 3, 4, …, per tutti gli n naturali[5].

Ovviamente il risultato, nei primi quattro livelli, è stato ottenuto per intuizione, dunque va accettato con riserva. Ma in questo contesto lo scopo principale è appunto di sviluppare la capacità di intuire in situazioni numeriche. Il valore formativo sta tutto nelle operazioni mentali che l'allievo compie per giungere a formulare una congettura, ingenua (primo livello), più raffinata (secondo livello), importante (terzo livello), formalizzata (quarto livello).

6.6 Le confezioni regalo

La mamma ha comperato 3 bottiglie di vino bianco, 3 di vino rosso e 3 di spumante. Vuole preparare una confezione regalo di 3 bottiglie.

Figura 8. Le 9 bottiglie di vino.

Domanda

In quanti modi la mamma potrebbe realizzare la confezione?

Commento

La situazione potrebbe anche essere presentata in forme diverse. Per esempio, al posto delle bottiglie di vino si potrebbero considerare 9 palline da tennis, 3 bianche, 3 gialle e 3 arancioni. O altro, basta non cambiare la struttura matematica. Nella consegna (che potrebbe anche essere raccontata o presentata con manipolazione di oggetti) non si dice nulla su come devono essere le confezioni. Per esempio, una confezione potrebbe contenere 3 bottiglie tutte di rosso (R-R-R) o una bottiglia per qualità (R-B-S). Se si adotta la situazione «bottiglie», occorre anche chiarire che, almeno per ora, le 3 bottiglie di una stessa qualità di vino sono identiche (non distinguibili) e inoltre

---

[5] Ricordo, solo agli insegnanti, che la dimostrazione per induzione completa è equivalente al quinto assioma di Peano dei numeri naturali (1891). Dunque questa particolare dimostrazione può essere ritenuta rigorosa solo se l'assiomatica di Peano lo è pure, ciò che invece è stato negato dai lavori di Kurt Gödel (1931). Sta di fatto che la dimostrazione è usata da quasi tutti i matematici, anche perché, in casi come il nostro, non vi sono alternative.

che l'ordine con cui sono messe non conta, per cui R-R-S è la stessa cosa di R-S-R e di S-R-R. È sconsigliabile porre queste condizioni nella consegna perché, oltre che appesantire quest'ultima, difficilmente sarebbero accolte dagli allievi, se non solo per il fatto che «fanno parte del problema». È molto meglio che si arrivi a stabilire queste (o altre) condizioni, nel momento in cui gli allievi si chiedono come potrebbe essere la confezione. Allora sì che acquistano importanza.

Primo livello

Gli allievi iniziano a identificare alcune possibili confezioni. Per esempio, R-R-R, B-B-B e S-S-S.
Con le tre bottiglie della stessa qualità si possono formare 3 diverse confezioni.
Con tre bottiglie fra loro diverse c'è una sola possibilità R-B-S (visto che l'ordine non conta).
Con due bottiglie di rosso si possono formare 2 confezioni diverse: R-R-B e R-R-S, così come con due di bianco e con due di spumante.
Ci sono altre possibili confezioni? Sembrerebbe di no.
In totale abbiamo contato 3+1+2·3=10 confezioni diverse.

Secondo livello

Allo stesso risultato si potrebbe giungere con una tabella di questo tipo:

R	B	S
3	0	0
0	3	0
0	0	3
1	1	1
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2

Figura 9. Esempio di tabella risolutiva per le confezioni di 3 bottiglie.

L'insegnante, deve fare bene attenzione che tutti gli allievi capiscano il significato della tabella e sappiano operare correttamente la conversione dal registro manipolatorio a quello schematico e viceversa, ciò che non è del tutto scontato.
Il pregio della tabella è la sua qualità sinottica, che aiuta non solo a trovare le 10 confezioni possibili, ma garantisce che non ce ne sono altre. Ecco un chiaro esempio nel quale la conversione da un registro semiotico a un altro induce una notevole semplificazione dell'iter risolutivo.

Terzo livello

Rilanciamo il problema. Le qualità di vino sono ancora le tre di prima, ma a disposizione vi sono 4 bottiglie per qualità e le confezioni devono essere di 4 bottiglie. Vista la comodità della tabella, si potrebbe subito sfruttare questo prezioso aiuto. La tabella va però adattata. In didattica si parla di trattamento all'interno del registro (nel nostro caso di quello schematico). Ecco un esempio di adattamento.

R	B	S
2	1	1
1	2	1
1	1	2
0	2	2
2	0	2
2	2	0
0	1	3
0	3	1
1	0	3
3	0	1
1	3	0
3	1	0
4	0	0
0	4	0
0	0	4

Figura 10. Esempio di tabella risolutiva per le confezioni di 4 bottiglie.

Ovviamente la distribuzione dei numeri nella tabella non deve essere necessariamente questa. La cosa importante è che, comunque si proceda, occorre farlo seguendo criteri chiari ed esaustivi.
Qui si è partiti con la considerazione che almeno due delle quattro bottiglie di ogni confezione devono essere identiche. Queste due possono essere o B o R o S, quindi 3 diverse confezioni possibili e nessun'altra (non si dimentichi che la somma dei numeri di ogni riga dev'essere 4). Si è poi continuato mettendo un solo 0 per ogni riga: con 0 e due 2 ci sono 3 possibilità (a seconda dove si colloca lo zero) e con 0 , 1 e 3 si sono trovate 6 diverse confezioni. Infine con due 0, vi sono tre possibilità (a seconda dove si colloca il 4). In totale si hanno perciò 15 diverse confezioni.

Anche se con difficoltà maggiore, la redazione di una simile tabella richiede, come nel livello precedente, l'adozione di un criterio chiaro ed esaustivo. Ciascuno può costruirsi il proprio criterio. La maggior valenza cognitiva dell'iter risolutivo sta proprio in questa attività.

Quarto livello

A questo punto, con allievi più in avanti negli studi, potremmo iniziare una riflessione generale, staccandoci dalla situazione proposta e ragionando in astratto.
Nella seconda tabella si possono riconoscere allineamenti del tipo <abb> (nelle prime sei righe e nelle ultime tre) e allineamenti del tipo <abc> nelle righe restanti.
Di allineamenti del tipo <abb>, cioè formati di solo due lettere delle quali una è ripetuta, ce ne sono 3: <abb>, <bab> e <bba>, a seconda dove si colloca l'elemento a. Ora però, siccome nel nostro caso a+b+b=4, si hanno 3 allineamenti base: <2,1,1>, <0,2,2> e <4,0,0>, per cui in totale abbiamo $3 \cdot 3=9$ diverse confezioni.
Di allineamenti del tipo <abc> ve ne sono 6 (2 con a al primo posto, 2 con b al primo posto e 2 con c al primo posto). Inoltre esiste una sola scomposizione additiva di 4 con 3 addendi diversi: 0+1+3. Abbiamo quindi 6 confezioni diverse. Altri casi sono esclusi.
Dunque in totale la mamma può realizzare la confezione in 9+6=15 modi diversi.

Ci tengo a sottolineare che l'iter risolutivo descritto non è affatto l'unico adottabile. Come ogni buon problema, anche in questa situazione ci si può muovere in piena libertà.

6.7 Lancio di dadi

Si lanciano due dadi, di quelli usuali sulle cui facce sono distribuiti i punti da 1 a 6.
Dopo ogni lancio si calcola la somma dei punti ottenuti sui due dadi.

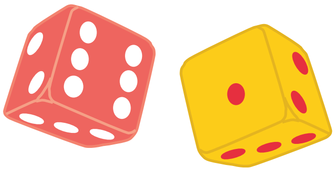


Figura 11. Due dadi distinguibili.

Domande possibili

- Quali somme si possono ottenere?
- In quanti modi si può ottenere ciascuno dei risultati possibili?

Facciamo un gioco: prima di lanciare, ognuno scommette sul risultato che uscirà. Chi azzecca, riceve un premio. Si lanciano i dadi parecchie volte.

- Vi sono risultati che conviene di più scegliere?
- Vi sono risultati che non conviene scegliere?
- Vi sono risultati che sicuramente ti faranno vincere?

Commento

Primo livello

La consegna può essere espressa unicamente nel registro manipolatorio. Basta servirsi di almeno una coppia di dadi di colore diverso[6], possibilmente grandi (ce ne sono, per esempio, di gomma piuma), in modo che gli allievi possano assistere a un certo numero di lanci e al conseguente calcolo dei punteggi ed eseguire loro stessi lanci a piacimento.
Dopo un po' l'insegnante può porre (o far nascere) la prima domanda. Facilmente gli allievi giungono a capire che la somma minima è 2 e che la massima è 12. Fra questi numeri, tutti sono somme possibili.
La seconda domanda comporta un esercizio di scomposizione additiva. I calcoli sono facili da eseguire, ma la difficoltà consiste nel riuscire a trovare tutte le scomposizioni possibili. Se i due dadi sono distinguibili (per esempio, di colore diverso) è più facile per gli allievi capire che la coppia di risultati (2,4) è diversa dalla (4,2). Diversamente, c'è una difficoltà in più.
Il gioco delle scommesse, introduce già gli allievi nel mondo della casualità. È prematuro, qui, parlare di probabilità matematica, ma la stima di ciò che è più o meno probabile (nel senso corrente del termine) è un buon modo di preparare il terreno per un miglior apprendimento di questo concetto, che comunque non deve essere introdotto troppo tardi[7]. L'aspetto della «convenienza», strettamente legato alla probabilità matematica, deve essere ben sottolineato. Già in questa semplice situazione, l'allievo può rendersi conto che ciò che «conviene scommettere» può rivelarsi utile, soprattutto se si eseguono parecchi lanci, ma non dà la sicurezza di azzeccare la somma che uscirà.

Secondo livello

L'analisi delle diverse scomposizioni additive è facilitata, per esempio, se si usa una rappresentazione ad albero o una tabella a doppia entrata come quella riportata nella figura 7.

---

[6] Il suggerimento di servirsi di dadi di diverso colore è unicamente di carattere didattico.
[7] Numerose esperienze fatte in modo scientificamente corretto hanno dimostrato che non solo è possibile, ma anche importante, introdurre il concetto di probabilità matematica già nel secondo ciclo della scuola elementare, se si vuole che più tardi gli allievi non incontrino eccessive difficoltà nella formalizzazione.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 12. Tabella risolutiva del lancio di due dadi.

La difficoltà, se esiste, sta nel riconoscere che la tabella risolve il problema centrale: quello di determinare tutte le somme possibili e le loro frequenze, perché ogni casella della tabella corrisponde a un caso di scomposizione additiva e inversamente. L'insegnante non deve dare per scontato questo fatto e curare che ogni allievo capisca la corrispondenza biunivoca appena accennata. Spesso gli allievi si accontentano del risultato e rifiutano di riflettere sul perché ciò che si è ottenuto è corretto. Così, difficilmente l'allievo saprà sfruttare questo processo risolutivo in una situazione diversa.

Terzo livello

Rilancio: consideriamo lo stesso problema di prima, con le stesse domande, ma invece di lanciare due dadi, ne lanciamo tre.

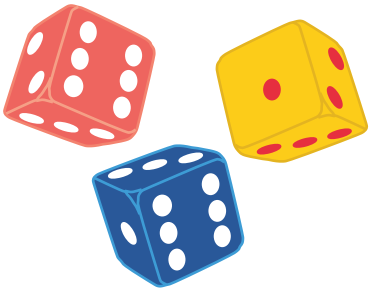


Figura 13. Tre dadi distinguibili.

Qui il ricorso a una tabella, sarebbe impossibile da realizzare su un foglio, essendo essa tridimensionale con 216 ($=6^3$) caselle. Anche l'albero si rivelerebbe praticamente non disegnabile perché avrebbe 216 rami terminali. Dunque occorre trovare un altro modo per poter rispondere correttamente alle prime due domande.
Vediamo di affrontare la situazione sfruttando il più possibile le esperienze fatte in precedenza. Questo modo di procedere lo consiglio vivamente perché, fra l'altro, permette di riprendere e rafforzare la conoscenza di iter risolutivi in parte già noti, il che contribuisce ad allargare il ventaglio di capacità risolutive dell'allievo.
Per prima cosa occorre trovare l'insieme delle somme ottenibili col lancio di tre dadi. Non è difficile rendersi conto che la somma minima è 3 e che quella massima è 18. Ogni altro numero naturale compreso in questo intervallo è una somma possibile. Poi occorre chiarire in che modo può essere ottenuta ogni somma. Come prima, si devono studiare le scomposizioni additive, con la novità che questa volta ogni scomposizione è composta di tre addendi. Per semplicità, ci aiutiamo con una tabella esplicativa. Occorre anche tenere presente che due scomposizioni con gli stessi addendi possono essere diverse, a seconda dell'ordine in cui questi sono scritti. Per esempio, 3+2+1 non rappresenta lo stesso caso di 2+3+1, perché i punteggi 2 e 3 sono ottenuti su dadi diversi. Possiamo anche richiamare conoscenze già incontrate, cioè che con tre addendi diversi (a,b,c) si hanno 6 diverse scomposizioni, che con due addendi uguali (a,b,b) si hanno 3 diverse scomposizioni e infine che con i tre addendi uguali si ha, ovviamente, una sola scomposizione[8].

[8] Se la classe ha già lavorato sugli anagrammi (le permutazioni del calcolo combinatorio), tutto ciò risulta evidente, altrimenti è opportuno riflettere nel senso mostrato in 6.6, terzo livello.

Anche qui è consigliabile schematizzare la soluzione usando una tabella. Ciascun allievo se ne può costruire una secondo il proprio gusto. La figura 8 mostra una possibile tabella.

somme	terne di addendi	frequenza
3	(1,1,1)	1
4	(1,1,2)	3
5	(1,1,3), (1,2,2)	6
6	(1,1,4), (1,2,3), (2,2,2)	10
7	(1,1,6), (1,2,4), (1,3,3), (2,2,3)	15
8	(1,1,6), (1,2,5), (1,3,4), (2,2,4), (2,3,3)	21
9	(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,3,4), (2,5,2) (3,3,3)	25
10	(1,3,6), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,4), (2,6,2) (3,3,4)	27
11	(1,4,6), (2,3,6), (1,5,5), (3,3,5), (2,4,5) (3,4,4)	27
12	(1,5,6), (2,4,6), (3,3,6), (2,5,5), (3,4,5), (4,4,4)	25
13	(1,6,6), (2,5,6), (3,4,6), (3,5,5), (4,4,5)	21
14	(2,6,6), (3,5,6), (4,5,5), (4,4,6)	15
15	(3,6,6), (4,5,6), (5,5,5)	10
16	(4,6,6), (5,5,6)	6
17	(6,6,5)	3
18	(6,6,6)	1

Figura 14. Tabella risolutiva del lancio di tre dadi.

Si può controllare se veramente la somma S delle frequenze è 216, come è giusto che sia. Il calcolo può essere fatto mentalmente, tenendo conto anche della simmetria dei valori numerici: le prime otto frequenze si ripetono in modo speculare a partire dalla nona.

$S = 2\ (1+3+6+10+15+21+25+27) = 2\ (10+10+40+48) = 2 \cdot 108 = 216$

A questo punto si può rispondere facilmente alla seconda parte delle domande, riferita alla scommessa che si può fare prima di lanciare i dadi. Le somme 10 e 11 hanno la frequenza massima (27), quindi dovrebbero essere le più consigliabili per una scommessa. Però anche le somme 9 e 12 hanno una buona frequenza (25). Ovviamente sconsigliabili sono le somme 3 e 18. Occorre poi ribadire con gli allievi che nessuna somma ha la certezza di essere realizzata e che tutte sono possibili.

Quarto livello

Le considerazioni fatte sulla convenienza assumono senso se si operassero molti, moltissimi lanci. Come fare, per costatare concretamente quanto detto? Si deve usare un computer. È sufficiente impostare un foglio elettronico, per esempio in questo modo.

	A	B	C	D
1	**dado 1**	**dado 2**	**dado 3**	**somma**
2	**4**	**6**	**5**	**15**
3	**3**	**1**	**4**	**8**
4	**2**	**2**	**2**	**6**
5	**2**	**2**	**5**	**9**
6	**5**	**1**	**4**	**10**
7	**5**	**1**	**3**	**9**

Figura 15. Simulazione di lanci di tre dadi.

Nella cella A1 si inserisce la formula «=CASUALE.TRA(1;6)», che va propagata nelle caselle B2 e C2. Nella casella D2 si inserisce la formula «=A2+B2+C2». Si evidenziano poi le caselle da A2 a D2 e si propagano in basso fino a dove si vuole (foglio elettronico permettendo!).

Ogni riga propagata simula un lancio dei tre dadi. Nell'esempio che sto descrivendo mi sono limitato a 1000 lanci, dei quali la figura 9 riporta solo i primi sei.
Fatto questo, si costruisce accanto una tabella riassuntiva della situazione.

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	**somme**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
2	**frequenze su 1000 lanci**	**5**	**8**	**25**	**36**	**70**	**106**	**119**	**123**	**136**	**107**	**90**	**67**	**54**	**35**	**13**	**6**

Figura 16. Tabella risolutiva del lancio di tre dadi.

Nella cella G1 si inserisce il numero 3 (somma minima ottenibile). Nella cella H1 si inserisce la formula «`=G1+1`» che va propagata fino a V1. Nella cella G2 si inserisce la formula «`=CONTA.SE($D2:$D1001;G$1)`» che va propagata fino alla cella V2.
Nelle caselle da G2 a V2 appaiono le frequenze di ogni somma da 3 a 18. Se si ricalcola, appariranno nuovi valori.
Su questa tabella è importante stimolare una discussione in classe. Si nota subito che le somme 10 e 11 sono quelle che si realizzano maggiormente, mentre 3 e 18 sono le meno frequenti. Questa osservazione coincide con quella (teorica) fatta in precedenza. Si può però notare che la somma 11 ha una frequenza sensibilmente maggiore di quella della somma 10. Questa costatazione conduce gli allievi a chiedersi se sarà sempre così. Non c'è che provare a ripetere i mille lanci. Niente di più comodo: basta stimolare il computer e i 1000 lanci vengono eseguiti all'istante. Si noterà che le frequenze cambiano e si incontreranno sicuramente anche situazioni in cui la frequenza della somma 10 è la maggiore. Da tutte le ripetizioni di 1000 lanci eseguite si possono però dedurre considerazioni generali, che (grosso modo) coincidono con quelle fatte nei livelli precedenti.

Quinto livello

Come già detto, con un foglio elettronico si possono simulare moltissimi lanci di tre dadi. Bene, ma come fare per confrontare, per esempio, i risultati ottenuti con 1000 lanci e quelli ottenuti con 2000 lanci? E ancora, come confrontare questi risultati con quelli teorici ottenuti nel terzo livello? È un buon momento per aiutare gli allievi a compiere i primi passi (se non sono già stati fatti) verso i concetti di probabilità matematica e di frequenza relativa. Si può riprendere la tabella delle frequenze teoriche. In essa si legge, per esempio, che la frequenza teorica della somma 8 è 21, meglio 21 su 216 casi possibili. L'idea che è possibile far nascere consiste nel «rapportare» questa frequenza assoluta al totale delle possibilità, quindi calcolare il rapporto 21/216. Questo rapporto è la probabilità matematica (nella forma più semplice e intuitiva) della somma 21. Se si fa la stessa cosa con tutte le somme ottenibili col lancio di tre dadi, si ottiene ciò che in matematica si chiama distribuzione di probabilità. Ecco la situazione completa[9]:

	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	**somme**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
2	**frequenze assolute**	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**25**	**27**	**27**	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**
3	**probabilità**	**0.005**	**0.014**	**0.028**	**0.046**	**0.069**	**0.097**	**0.116**	**0.125**	**0.125**	**0.116**	**0.097**	**0.069**	**0.046**	**0.028**	**0.014**	**0.005**

Figura 17. Distribuzione di probabilità.

A questo punto è interessante confrontare i risultati teorici con quelli ottenibili mediante simulazione al computer. Riprendiamo i risultati già mostrati sopra e aggiungiamo le frequenze relative su 1000 lanci.

[9] I valori della probabilità sono stati approssimati a meno di un millesimo.

4	**probabilità teorica**	**0.005**	**0.014**	**0.028**	**0.046**	**0.069**	**0.097**	**0.116**	**0.125**	**0.125**	**0.116**	**0.097**	**0.069**	**0.046**	**0.028**	**0.014**	**0.005**
5	**freq. relative su 1000 lanci**	**0.005**	**0.008**	**0.025**	**0.036**	**0.070**	**0.106**	**0.119**	**0.123**	**0.136**	**0.107**	**0.090**	**0.067**	**0.054**	**0.035**	**0.013**	**0.006**

Figura 18. Tabella di confronto tra la probabilità matematica e le frequenze relative di 1000 lanci di 3 dadi.

Si vede (meglio nella rappresentazione grafica) come la differenza tra la probabilità teorica e le frequenze relative su 1000 lanci sia minima.

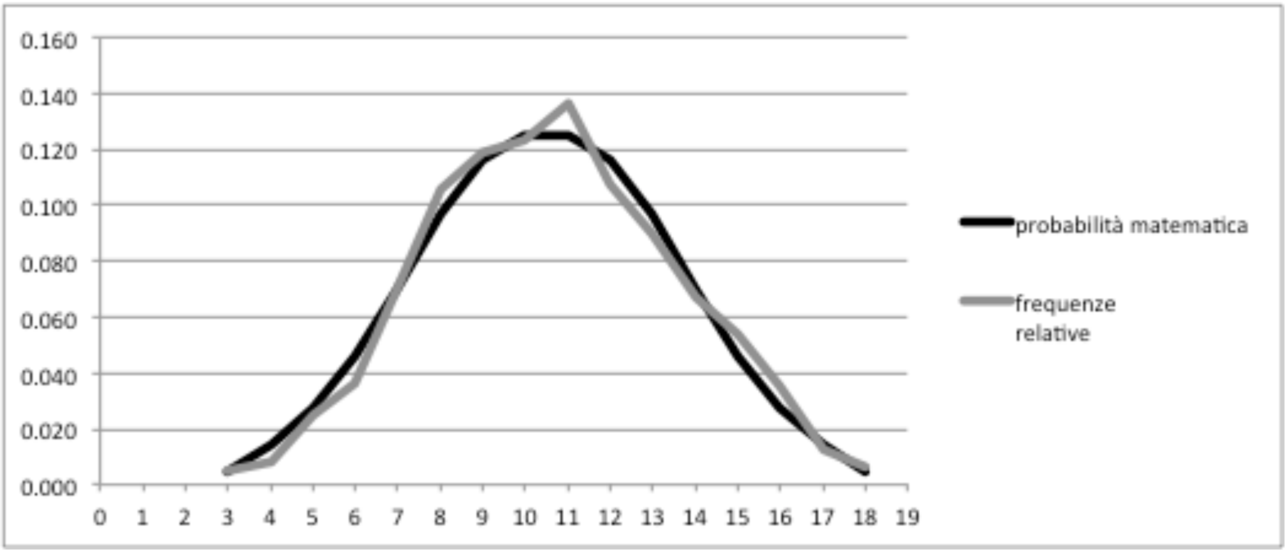


Figura 19. Grafici sovrapposti delle serie di valori mostrati dalla figura 12.

Può anche succedere che le stesse siano più marcate: è il gioco del caso.

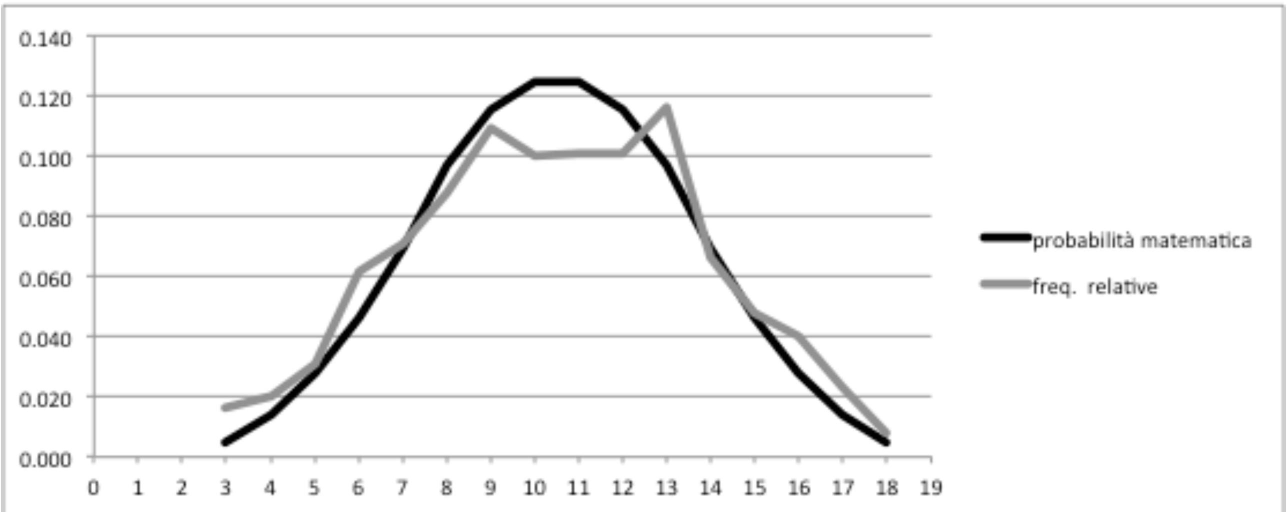


Figura 20. Rappresentazione grafica di un caso di 1000 lanci con risultati sensibilmente diversi dalla distribuzione di probabilità teorica.

Questa situazione mette in guardia chi, ingenuamente, crede che il caso sia sempre ossequioso nei confronti della teoria, o meglio che il modello matematico dia la garanzia di prevedere l’esito di prove aleatorie con grande affidabilità, il che è anche una lezione di vita.

Bibliografia

Arrigo G. (2014). Conversioni e trattamenti semiotici nel *problem solving*. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 69*, 85-104. ISBN 978-88- 86486-91-0

Arrigo G. (2015). Problemi per tutti. *Bollettino dei docenti di matematica, nr. 70*, 81-102. ISBN 978-88- 86486-92-7

Arrigo G. (2016). Sull'introduzione dell'allievo al calcolo letterale. *Alice & Bob, Algebra in Europa,* 93-104. Milano: EGEA, Centro Pristem Università Bocconi. ISBN: 978-88-238-6196-1

Bolondi G., D'Amore B. (2010). *La matematica non serve a nulla, provocazioni e risposte per capire di più*. Bologna: Editrice Compositori.

D'Amore B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].

Sbaragli S., Santi G. (2012). Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo. *Bollettino dei docenti di matematica. 65*, 35-55. ISBN 978-88- 86486-87-3.